**Олимпиада по математике**

**9 класс**

1. (4) Известно, что *а =* 32010 *+* 2. Верно ли, что *а*2 *+* 2 – простое число? Ответ обоснуйте.

2. (4) Сколько существует трехзначных чисел, в записи которых встречается хотя бы одна тройка?

3. (3) Найдите, какую цифру обозначает каждая буква в следующем равенстве: *АХА=БАХ*.

4. (5) Буратино зарыл на Поле Чудес золотую монету. Из нее выросло дерево, а на нем – две монеты: серебряная и золотая. Серебряную монету Буратино спрятал в карман, а золотую зарыл, и опять выросло дерево ... . Каждый раз на дереве вырастали две монеты: либо две золотые, либо золотая и серебряная, либо две серебряные. Серебряные монеты Буратино складывал в карман, а золотые закапывал. Когда закапывать стало нечего, в кармане у Буратино было 2010 серебряные монеты. Сколько монет закопал Буратино?

5. (5) Существуют ли такие натуральные числа *a*, *b*, *c*, *d*, что *a*3 + *b*3 + *c*3 + *d*3 = 100100?

**Решения**

1. Ответ: нет, не верно.

Заметим, что данное число при делении на 3 дает остаток 2, следовательно, оно имеет вид:

a =3*t* +2, где *t* – некоторое натуральное число (в данном случае *t* = 32009). Тогда , то есть, кратно трем при любом натуральном *t*.

2. Если в записи числа нет тройки, то на первом месте может стоять любая цифра, кроме 0 и3, на двух других местах - любая цифра, кроме 3. Значит, всего имеется 899=648 трехзначных чисел, в записи которых нет 3. Всего трехзначных чисел 999-99 =900. А значит трехзначных чисел, в записи которых встречается хотя бы одна тройка 252.

Ответ: 252.

3. 252=625.

4. Ответ: 2009.

Назовем монету, из которой что-то выросло – «родителем», а монету, которая выросла из какой-нибудь монеты – «ребенком». Заметим, что «детьми» являются все монеты, кроме первой, а каждая золотая монета (и только она) является «родителем». Поскольку у каждого «родителя» – два «ребенка», то «детей» – в два раза больше, чем «родителей».

Пусть *x* – количество золотых монет, а *y* – количество серебряных, тогда всего монет будет *x + y*, из которых «детьми» являются (*x + y*) – 1 монет, а «родителями» – *x*. Составляем уравнение: (*x + y*) – 1 = 2*x* ⇔ *x = y* – 1, то есть, количество золотых монет меньше количества серебряных на 1, следовательно, Буратино закопал 2009 монет.

5. Существуют, например

(10033)3 + (2⋅10033)3 + (3⋅10033)3 + (4⋅10033)3 = (13 + 23 + 33 + 43)⋅10099 = 100⋅10099 = 100100.

**10 класс**

1.(3) В место a, b, c вставьте такие числа, чтобы равенство (x + a x +2)(x +3)= (x + b )(x + c x + 6 ) стало тождеством.

2. (4) Известно, что каждое из уравнений *x*2 + 2*bx* + *c* = 0 и *x*2 + 2*cx* + *b* = 0, где *b* > 0 и *с* > 0, имеет хотя бы один корень. Произведение всех корней этих уравнений равно 1. Найдите *b* и *c*.

3. (5) Решить в натуральных числах уравнение 2х2 + 3xy+y2 = 32010.

4. (5) На новом сайте зарегистрировалось 2000 человек. Каждый пригласил к себе в друзья по 1000 человек. Два человека объявляются друзьями тогда и только тогда, когда каждый из них пригласил другого в друзья. Какое наименьшее количество пар друзей могло образоваться?

5. (4) Доказать, что в равнобедренном треугольнике с углом 20° при вершине боковая сторона больше удвоенного основания.

**Решения**

1. Преобразуем левую и правую части равенства

( x + a x +2)(x +3)= x + (a + 3) x + (3а +2)x + 6

 (x + b)(x + c x + 6 )= x + (b + c) x + (bc +6)x + 6b.

Данное равенство будет являться тождеством тогда и только тогда, когда одновременно выполняется равенство a + 3= b + c, 3а +2= bc +6, 6=6b. Решая соответствующую систему уравнений, получим b = 1; a = 3; c = 5.

Ответ: (x + 3 x +2)( x +3)= (x + 1 )(x + 5 x + 6 ).

2. Ответ: *b* = *c* = 1.

 Так как каждое уравнениеимеет хотя бы один корень, то *b*2 – *c* ≥ 0 ⇔ *b*2 ≥ *c* и *c*2 – *b* ≥ 0 ⇔ *c*2 ≥ *b*. Кроме того, по теореме Виета, произведение корней первого уравнения равно *с*, а произведение корней второго уравнения равно *b*. Из условия следует, что *bc* = 1. Подставим  в каждое из полученных неравенств. Учитывая, что *b* > 0 и *с* > 0, получим, что *c* ≤ 1 и *с* ≥ 1 соответственно, то есть, *c* = 1, значит, и *b* = 1.

 3.  поэтому   и  Но тогда 2х + y делится на х + y без остатка, а следовательно х делится на х + y без остатка, что на множестве натуральных чисел невозможно.

Ответ: уравнение решений не имеет.

4. Ответ. 1000.

Всего было отправлено 2000000 приглашений, а пар на сайте 2000⋅1999/2 = 1999000. Приглашений на 1000 больше, чем пар, поэтому внутри хотя бы 1000 пар было отправлено два приглашения. Значит, образовалось хотя бы 1000 пар друзей. Ровно 1000 возможна: расставим всех людей на сайте по кругу, и пусть каждый пригласит 1000 следующих за ним по часовой стрелке. Тогда друзьями окажутся только то, кто расположен строго напротив друг друга.

5.

, поэтому . Отложим на ВА отрезок ВЕ = ВС. ΔВЕС – равнобедренный, поэтому  и ЕС>ВС. Следовательно, . В ΔАСЕ , поэтому . 

***11 класс***

1. (3) В место a, b, c вставьте такие числа, чтобы равенство (x + a x +2)(x +3)= (x + b )(x + c x + 6 ) стало тождеством.

2. (4) Решите систему уравнений 

3. (5) Докажите, что для любых положительных x и y, для любого *α*

 .

4. (4) В пруд пустили *30* щук, которые постепенно поедали друг друга. Щука считается сытой, если она съела трёх щук (сытых или голодных). Каково наибольшее число щук, которые могут почувствовать себя сытыми за достаточно большой промежуток времени?

5. (5) В выпуклом четырехугольнике АВСD биссектрисы углов CAD и CBD пересекаются на стороне CD. Доказать, что биссектрисы углов ACB и ADB пересекаются на стороне АВ.

**Решения**

1. Преобразуем левую и правую части равенства

( x + a x +2)(x +3)= x + (a + 3) x + (3а +2)x + 6

 (x + b)(x + c x + 6 )= x + (b + c) x + (bc +6)x + 6b.

Данное равенство будет являться тождеством тогда и только тогда, когда одновременно выполняется равенство a + 3= b + c, 3а +2= bc +6, 6=6b. Решая соответствующую систему уравнений, получим b = 1; a = 3; c = 5.

Ответ: (x + 3 x +2)( x +3)= (x + 1 )(x + 5 x + 6 ).

2. 

Пусть , 



Ответ: (3; 0,6), (-4; 4,8).

3. Пусть  тогда 

4. Разобьем процесс съедения щук по этапам. На первом этапе *7* щук съедают *21* щуку и еще остается *2.* На втором этапе щук всего *9* из них *2* голодных. Эти две съедают *6* щук. На третьем этапе щук всего *3,* их недостаточно для того, чтобы накормить даже одну щуку.

 Ответ: 9 щук.

5. Пусть биссектрисы углов CAD и CBD пересекаются в т.М и . Для доказательства утверждения достаточно точку пересечения угла ACB с отрезком АВ (т.N) соединить с вершиной D и доказать, что DN биссектриса угла ADB

1). Т.к. ВМ биссектриса в ΔСВМ и АМ – биссектриса в ΔСАD, то по свойству биссектрисы

и  поэтому .

2). Т.к. CN биссектриса в Δ АСВ, то , поэтому  по признаку биссектрисы. DN – биссектриса 

**Олимпиада по математике**

**9 класс**

1. (4) Известно, что *а =* 32010 *+* 2. Верно ли, что *а*2 *+* 2 – простое число? Ответ обоснуйте.

2. (4) Сколько существует трехзначных чисел, в записи которых встречается хотя бы одна тройка?

3. (3) Найдите, какую цифру обозначает каждая буква в следующем равенстве: *АХА=БАХ*.

4. (5) Буратино зарыл на Поле Чудес золотую монету. Из нее выросло дерево, а на нем – две монеты: серебряная и золотая. Серебряную монету Буратино спрятал в карман, а золотую зарыл, и опять выросло дерево ... . Каждый раз на дереве вырастали две монеты: либо две золотые, либо золотая и серебряная, либо две серебряные. Серебряные монеты Буратино складывал в карман, а золотые закапывал. Когда закапывать стало нечего, в кармане у Буратино было 2010 серебряные монеты. Сколько монет закопал Буратино?

5. (5) Существуют ли такие натуральные числа *a*, *b*, *c*, *d*, что *a*3 + *b*3 + *c*3 + *d*3 = 100100?

\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

**Олимпиада по математике**

**9 класс**

1. (4) Известно, что *а =* 32010 *+* 2. Верно ли, что *а*2 *+* 2 – простое число? Ответ обоснуйте.

2. (4) Сколько существует трехзначных чисел, в записи которых встречается хотя бы одна тройка?

3. (3) Найдите, какую цифру обозначает каждая буква в следующем равенстве: *АХА=БАХ*.

4. (5) Буратино зарыл на Поле Чудес золотую монету. Из нее выросло дерево, а на нем – две монеты: серебряная и золотая. Серебряную монету Буратино спрятал в карман, а золотую зарыл, и опять выросло дерево ... . Каждый раз на дереве вырастали две монеты: либо две золотые, либо золотая и серебряная, либо две серебряные. Серебряные монеты Буратино складывал в карман, а золотые закапывал. Когда закапывать стало нечего, в кармане у Буратино было 2010 серебряные монеты. Сколько монет закопал Буратино?

5. (5) Существуют ли такие натуральные числа *a*, *b*, *c*, *d*, что *a*3 + *b*3 + *c*3 + *d*3 = 100100?

\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

**Олимпиада по математике**

**9 класс**

1. (4) Известно, что *а =* 32010 *+* 2. Верно ли, что *а*2 *+* 2 – простое число? Ответ обоснуйте.

2. (4) Сколько существует трехзначных чисел, в записи которых встречается хотя бы одна тройка?

3. (3) Найдите, какую цифру обозначает каждая буква в следующем равенстве: *АХА=БАХ*.

4. (5) Буратино зарыл на Поле Чудес золотую монету. Из нее выросло дерево, а на нем – две монеты: серебряная и золотая. Серебряную монету Буратино спрятал в карман, а золотую зарыл, и опять выросло дерево ... . Каждый раз на дереве вырастали две монеты: либо две золотые, либо золотая и серебряная, либо две серебряные. Серебряные монеты Буратино складывал в карман, а золотые закапывал. Когда закапывать стало нечего, в кармане у Буратино было 2010 серебряные монеты. Сколько монет закопал Буратино?

5. (5) Существуют ли такие натуральные числа *a*, *b*, *c*, *d*, что *a*3 + *b*3 + *c*3 + *d*3 = 100100?

\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

**Олимпиада по математике**

**9 класс**

1. (4) Известно, что *а =* 32010 *+* 2. Верно ли, что *а*2 *+* 2 – простое число? Ответ обоснуйте.

2. (4) Сколько существует трехзначных чисел, в записи которых встречается хотя бы одна тройка?

3. (3) Найдите, какую цифру обозначает каждая буква в следующем равенстве: *АХА=БАХ*.

4. (5) Буратино зарыл на Поле Чудес золотую монету. Из нее выросло дерево, а на нем – две монеты: серебряная и золотая. Серебряную монету Буратино спрятал в карман, а золотую зарыл, и опять выросло дерево ... . Каждый раз на дереве вырастали две монеты: либо две золотые, либо золотая и серебряная, либо две серебряные. Серебряные монеты Буратино складывал в карман, а золотые закапывал. Когда закапывать стало нечего, в кармане у Буратино было 2010 серебряные монеты. Сколько монет закопал Буратино?

5. (5) Существуют ли такие натуральные числа *a*, *b*, *c*, *d*, что *a*3 + *b*3 + *c*3 + *d*3 = 100100?

\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

**Олимпиада по математике**

**10 класс**

1.(3) В место a, b, c вставьте такие числа, чтобы равенство (x + a x +2)(x +3)= (x + b )(x + c x + 6 ) стало тождеством.

2. (4) Известно, что каждое из уравнений *x*2 + 2*bx* + *c* = 0 и *x*2 + 2*cx* + *b* = 0, где *b* > 0 и *с* > 0, имеет хотя бы один корень. Произведение всех корней этих уравнений равно 1. Найдите *b* и *c*.

3. (5) Решить в натуральных числах уравнение 2х2 + 3xy+y2 = 32010.

4. (5) На новом сайте зарегистрировалось 2000 человек. Каждый пригласил к себе в друзья по 1000 человек. Два человека объявляются друзьями тогда и только тогда, когда каждый из них пригласил другого в друзья. Какое наименьшее количество пар друзей могло образоваться?

5. (4) Доказать, что в равнобедренном треугольнике с углом 20° при вершине боковая сторона больше удвоенного основания.

\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

**Олимпиада по математике**

**10 класс**

1.(3) В место a, b, c вставьте такие числа, чтобы равенство (x + a x +2)(x +3)= (x + b )(x + c x + 6 ) стало тождеством.

2. (4) Известно, что каждое из уравнений *x*2 + 2*bx* + *c* = 0 и *x*2 + 2*cx* + *b* = 0, где *b* > 0 и *с* > 0, имеет хотя бы один корень. Произведение всех корней этих уравнений равно 1. Найдите *b* и *c*.

3. (5) Решить в натуральных числах уравнение 2х2 + 3xy+y2 = 32010.

4. (5) На новом сайте зарегистрировалось 2000 человек. Каждый пригласил к себе в друзья по 1000 человек. Два человека объявляются друзьями тогда и только тогда, когда каждый из них пригласил другого в друзья. Какое наименьшее количество пар друзей могло образоваться?

5. (4) Доказать, что в равнобедренном треугольнике с углом 20° при вершине боковая сторона больше удвоенного основания.

\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

**Олимпиада по математике**

**10 класс**

1.(3) В место a, b, c вставьте такие числа, чтобы равенство (x + a x +2)(x +3)= (x + b )(x + c x + 6 ) стало тождеством.

2. (4) Известно, что каждое из уравнений *x*2 + 2*bx* + *c* = 0 и *x*2 + 2*cx* + *b* = 0, где *b* > 0 и *с* > 0, имеет хотя бы один корень. Произведение всех корней этих уравнений равно 1. Найдите *b* и *c*.

3. (5) Решить в натуральных числах уравнение 2х2 + 3xy+y2 = 32010.

4. (5) На новом сайте зарегистрировалось 2000 человек. Каждый пригласил к себе в друзья по 1000 человек. Два человека объявляются друзьями тогда и только тогда, когда каждый из них пригласил другого в друзья. Какое наименьшее количество пар друзей могло образоваться?

5. (4) Доказать, что в равнобедренном треугольнике с углом 20° при вершине боковая сторона больше удвоенного основания.

\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

**Олимпиада по математике**

**10 класс**

1.(3) В место a, b, c вставьте такие числа, чтобы равенство (x + a x +2)(x +3)= (x + b )(x + c x + 6 ) стало тождеством.

2. (4) Известно, что каждое из уравнений *x*2 + 2*bx* + *c* = 0 и *x*2 + 2*cx* + *b* = 0, где *b* > 0 и *с* > 0, имеет хотя бы один корень. Произведение всех корней этих уравнений равно 1. Найдите *b* и *c*.

3. (5) Решить в натуральных числах уравнение 2х2 + 3xy+y2 = 32010.

4. (5) На новом сайте зарегистрировалось 2000 человек. Каждый пригласил к себе в друзья по 1000 человек. Два человека объявляются друзьями тогда и только тогда, когда каждый из них пригласил другого в друзья. Какое наименьшее количество пар друзей могло образоваться?

5. (4) Доказать, что в равнобедренном треугольнике с углом 20° при вершине боковая сторона больше удвоенного основания.

\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

**Олимпиада по математике, *11 класс***

1. (3) В место a, b, c вставьте такие числа, чтобы равенство (x + a x +2)(x +3)= (x + b )(x + c x + 6 ) стало тождеством.

2. (4) Решите систему уравнений 

3. (5) Докажите, что для любых положительных x и y, для любого *α*

 .

4. (4) В пруд пустили *30* щук, которые постепенно поедали друг друга. Щука считается сытой, если она съела трёх щук (сытых или голодных). Каково наибольшее число щук, которые могут почувствовать себя сытыми за достаточно большой промежуток времени?

5. (5) В выпуклом четырехугольнике АВСD биссектрисы углов CAD и CBD пересекаются на стороне CD. Доказать, что биссектрисы углов ACB и ADB пересекаются на стороне АВ.

**Олимпиада по математике, *11 класс***

1. (3) В место a, b, c вставьте такие числа, чтобы равенство (x + a x +2)(x +3)= (x + b )(x + c x + 6 ) стало тождеством.

2. (4) Решите систему уравнений 

3. (5) Докажите, что для любых положительных x и y, для любого *α*

 .

4. (4) В пруд пустили *30* щук, которые постепенно поедали друг друга. Щука считается сытой, если она съела трёх щук (сытых или голодных). Каково наибольшее число щук, которые могут почувствовать себя сытыми за достаточно большой промежуток времени?

5. (5) В выпуклом четырехугольнике АВСD биссектрисы углов CAD и CBD пересекаются на стороне CD. Доказать, что биссектрисы углов ACB и ADB пересекаются на стороне АВ.

**Олимпиада по математике, *11 класс***

1. (3) В место a, b, c вставьте такие числа, чтобы равенство (x + a x +2)(x +3)= (x + b )(x + c x + 6 ) стало тождеством.

2. (4) Решите систему уравнений 

3. (5) Докажите, что для любых положительных x и y, для любого *α*

 .

4. (4) В пруд пустили *30* щук, которые постепенно поедали друг друга. Щука считается сытой, если она съела трёх щук (сытых или голодных). Каково наибольшее число щук, которые могут почувствовать себя сытыми за достаточно большой промежуток времени?

5. (5) В выпуклом четырехугольнике АВСD биссектрисы углов CAD и CBD пересекаются на стороне CD. Доказать, что биссектрисы углов ACB и ADB пересекаются на стороне АВ.

**Олимпиада по математике, *11 класс***

1. (3) В место a, b, c вставьте такие числа, чтобы равенство (x + a x +2)(x +3)= (x + b )(x + c x + 6 ) стало тождеством.

2. (4) Решите систему уравнений 

3. (5) Докажите, что для любых положительных x и y, для любого *α*

 .

4. (4) В пруд пустили *30* щук, которые постепенно поедали друг друга. Щука считается сытой, если она съела трёх щук (сытых или голодных). Каково наибольшее число щук, которые могут почувствовать себя сытыми за достаточно большой промежуток времени?

5. (5) В выпуклом четырехугольнике АВСD биссектрисы углов CAD и CBD пересекаются на стороне CD. Доказать, что биссектрисы углов ACB и ADB пересекаются на стороне АВ.